Recherche opérationnelle

DUT Info 2e année, parcours A

La programmation linéaire, introduction

Florent Foucaud

IUT CLERMONT AUVERGNE

Aurillac - Clermont-Ferrand - Le Puy-en-Velay
Montluçon - Moulins - Vichy

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Remarques :

Le terme "programmation", issu du vocabulaire militaire, fait ici référence à la planification.

"Optimisation linéaire" serait aujourd'hui un meilleur terme, mais "programmation linéaire" est désormais standard.

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Exemple de programme linéaire

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Exemple de programme linéaire

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

But : trouver une solution optimale, si elle existe.

La programmation linéaire (PL), c'est quoi ?

Définition : programmation linéaire

Outil mathématique servant à optimiser (maximiser/minimiser) une fonction objectif sur des variables, selon des contraintes sur ces variables. La fonction objectif et les contraintes sont toutes des (in)équations linéaires.

Exemple de programme linéaire

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser :} & 10x & + & 5y & & \\
\text{tel que :} & 1.5x & - & 2y & \leq & 1000 \\
 & 3x & + & y & \leq & 1500 \\
 & x & & & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

But : trouver une solution optimale, si elle existe.

Vocabulaire :

$$
\begin{array}{rcl}
x, y & \rightarrow & \text{variables} \\
\max 10x + 5y & \rightarrow & \text{fonction objectif} \\
x + y \leq 1000 & \rightarrow & \text{contrainte} \\
x = 1, y = 0 & \rightarrow & \text{solution}(avec)
\end{array}
$$

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}
$$

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}$$

Solution optimale : 7.18 kg de carottes pour 11.49€ !

Un exemple concret : bien manger

But : trouver un régime alimentaire bon marché qui satisfait nos besoins.

- Types de nutriments et apport journalier recommandé :
  protéines (56g), vitamine C (110mg), fer (2mg)
- Types d'aliments : Ananas, Banane, Carotte, Datte, Endive

aliment	prix (€/kg)	protéines (g/kg)	vitamine C (mg/kg)	fer (mg/kg)
Ananas	3.1	5	478	3
Banane	2.1	10	70	12
Carotte	1.6	7.8	20	2.4
Datte	8.7	25	4	10
Endive	3.8	13	65	8

Soient a, b, c, d, e les quantités d'ananas, bananes, carottes, dattes, endives.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser :} & 3.1a & + & 2.1b & + & 1.6c & + & 8.7d & + & 3.8e & & \\
\text{tel que :} & 5a & + & 10b & + & 7.8c & + & 25d & + & 13e & \geq & 56 \\
 & 478a & + & 70b & + & 20c & + & 4d & + & 65e & \geq & 110 \\
 & 3a & + & 12b & + & 2.4c & + & 10d & + & 8e & \geq & 2 \\
 & & & & & & & & & a, b, c, d, e & \geq & 0
\end{array}
$$

Solution optimale : 7.18 kg de carottes pour 11.49€ !

Si on rajoute les contraintes $a, b, c, d, e \leq 1$:
Solution optimale à 16.32€ avec 4g d'ananas et 1kg des autres aliments.

Le “diet problem” : un peu d’histoire

C’est historiquement le premier problème sur lequel George B. Dantzig aurait testé son algorithme dit du “simplexe” pour résoudre les PL.

Il y avait bien sûr énormément de types d’aliments possibles :
77 variables, 9 contraintes, 120 jours de travail pour le résoudre à la main !

G. B. Dantzig

Le “diet problem” : un peu d’histoire

C’est historiquement le premier problème sur lequel George B. Dantzig aurait testé son algorithme dit du “simplexe” pour résoudre les PL.

Il y avait bien sûr énormément de types d’aliments possibles :
77 variables, 9 contraintes, 120 jours de travail pour le résoudre à la main !

La légende dit que la première solution proposait de consommer plusieurs litres de vinaigre par jour. Ou bien 200 cubes de bouillon.

G. B. Dantzig

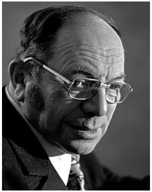
Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.*
>
> M. Grötschl

Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)



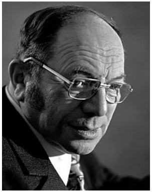
L. V. Kantorovich

Mathematical methods in organization and planning production, Univ. de Leningrad, 1939

Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)



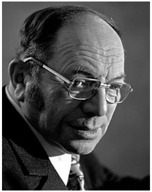
L. V. Kantorovich

G. B. Dantzig

Histoire abrégée de la PL

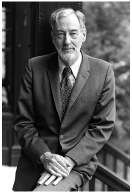
Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle. M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : "Prix Nobel" d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)



L. V. Kantorovich

G. B. Dantzig

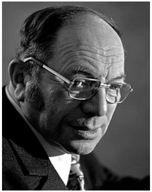


T. C. Koopmans

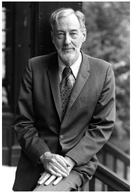
Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : “Prix Nobel” d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)
- 1979 : Méthode de l'ellipsoïde (Leonid G. Khachiyan)


L. V. Kantorovich


G. B. Dantzig


T. C. Koopmans


L. G. Khachiyan


ARCHIVES 1979

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics

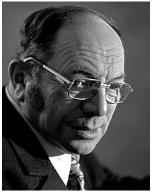
By MALCOLM W. BROWNE NOV. 7, 1979

A surprise discovery by an obscure Soviet mathematician has rocked the world of mathematics and computer analysis, and experts have begun exploring its practical applications.

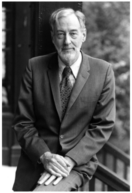
Histoire abrégée de la PL

> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

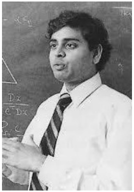
- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : "Prix Nobel" d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)
- 1979 : Méthode de l'ellipsoïde (Leonid G. Khachiyan)
- 1984 : Méthode des points intérieurs (Narendra Karmarkar)


L. V. Kantorovich


G. B. Dantzig


T. C. Koopmans


L. G. Khachiyan


N. Karmarkar


Breakthrough in Problem Solving

THE NEW YORK TIMES, November 19, 1984

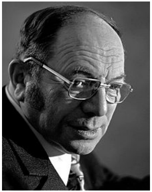

Folding the Perfect Corner

TIME MAGAZINE, December 3, 1984

Histoire abrégée de la PL

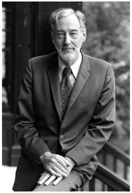
> *Du point de vue de l'économie, la programmation linéaire est la découverte mathématique la plus importante du XXe siècle.* M. Grötschl

- 1939-1944 : Bases de la programmation linéaire (industrie du bois, optimisation des transports sur glace) (Leonid V. Kantorovich)
- 1947 : Algorithme du simplexe développé pour l'armée américaine, publié en 1951 (George B. Dantzig)
- 1975 : "Prix Nobel" d'économie (Leonid V. Kantorovich et Tjalling C. Koopmans)
- 1979 : Méthode de l'ellipsoïde (Leonid G. Khachiyan)
- 1984 : Méthode des points intérieurs (Narendra Karmarkar)



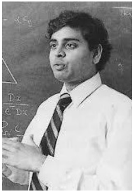
L. V. Kantorovich

G. B. Dantzig



T. C. Koopmans

L. G. Khachiyan



N. Karmarkar