Maths pour l'image : algèbre linéaire et géométrie
Fiche d'exercices 3 - matrices

Exercice 1

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que le produit des matrices est associatif, c'est-à-dire que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Le produit de matrices est-il commutatif ?

Exercice 2
Soient les matrices d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) suivantes. Déterminer les expressions de ces applications linéaires (du type $h(x, y, z) = (2x + y, z, 3y)$).

1. $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $M(g, B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. Soient les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies des manières suivantes. Déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + y + z, z)$
   (b) $g(x, y, z) = (0, z, y)$
2. Déterminer les matrices dans B des fonctions suivantes où f et g sont les fonctions définies précédemment :
   (a) $f \circ g(x, y, z) = f(g(x, y, z))$
   (b) $g \circ f(x, y, z) = g(f(x, y, z))$

Exercice 4
Déterminer les matrices des transformations géométriques de $\mathbb{R}^3$ suivantes (dans la base canonique).

1. La rotation r_1 d'angle $\frac{3\pi}{2}$ autour de l'axe des z (dans le sens trigonométrique, vu depuis l'axe des z)
2. La rotation r_2 d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe des y (dans le sens trigonométrique, vu depuis l'axe des y)
3. La composition de r_2 avec r_1 : $r_2 \circ r_1$
4. La composition de r_1 avec r_2 : $r_1 \circ r_2$
5. L'homothétie h_3 de rapport 3
6. La symétrie s par rapport au plan d'équation $y = z$
7. La projection p sur le plan $z = 0$