Maths pour l'image : algèbre linéaire et géométrie

Fiche d'exercices 1 - espaces vectoriels

Exercice 1 - espaces vectoriels

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on définit l'addition entre vecteurs et la multiplication par un scalaire réel des façons suivantes. E est-il alors un espace vectoriel ?

aide : vérifiez la commutativité de l'addition et le neutre pour la multiplication

1. $(u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$ et $\lambda \cdot (u_x, u_y) = (\lambda u_x, \lambda u_y)$
2. $(u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x, u_y)$ et $\lambda \cdot (u_x, u_y) = (\lambda u_x, \lambda u_y)$
3. $(u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$ et $\lambda \cdot (u_x, u_y) = (\lambda u_x, 0)$

Exercice 2 - sous-espaces vectoriels

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $E_1 = \{(x, y, z) \mid x = 2z\}$
   (b) $E_2 = \{(x, y, z) \mid y \neq 0\}$
   (c) $E_3 = \{(x, y, z) \mid 5x - y + z - 4 = 0\}$
   (d) $E_4 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F + G = \{x = f + g \mid f \in F, g \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 - dépendance linéaire

1. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?
   (a) $\{(6, 5), (3, 2)\}$
   (b) $\{(6, 4), (3, 2), (1, 0)\}$
   (c) $\{(0, 0), (1, 2)\}$
2. Soient $\{u, v, w\}$ une famille libre dans un espace vectoriel V. Montrer que :
   (a) $\{u + v, v + w, u - w\}$ est une famille liée dans V
   (b) $\{u + v, u - v, u + w\}$ est une famille libre dans V

Exercice 4 - générateurs, bases

1. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?
   (a) $F_1 = \{(1, 0, 1), (2, 0, -1), (-1, 1, 2)\}$
   (b) $F_2 = \{(1, -1, 0), (1, 2, 3), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
   (c) $F_3 = \{(1, -1, 0), (1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$
2. Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$.
   (a) Montrer que c'en est une base.
   (b) Donner les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ dans cette base.