Maths pour l'image : algèbre linéaire et géométrie

Devoir à la maison (pour le 17.11.2010)

Le DM est à rendre *en monôme* le mecredi 17 novembre 2010 et comptera dans la note de contrôle continu. Le barème est donné à titre indicatif. Comme c'est un devoir à la maison, dans la notation il sera particulièrement tenu compte de la qualité de la rédaction : expliquez ce que vous écrivez ! Bon courage.

Exercice 1 - sous-espaces (4 points)
Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Interpétez-les géométriquement (à l'aide d'un petit dessin).

1. $\mathcal{E}_1 = \{(x, y, z) \mid z = 3\}$
2. $\mathcal{E}_2 = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$
3. $\mathcal{E}_3 = \{(x, y, z) \mid y = x^2\}$
4. $\mathcal{E}_3 = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$

Exercice 2 - bases en 3D (3 points)
Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$? Si non, sont-elles génératrices ?

1. $\mathcal{F}_1 = \{(1, 0, 1), (2, 0, -1), (-1, 1, 2)\}$
2. $\mathcal{F}_2 = \{(1, 0, 1), (2, 0, -1), (-1, 1, 2), (1, 0, 0)\}$
3. $\mathcal{F}_3 = \{(1, -1, 0), (1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$

Exercice 3 - bases en 4D (3 points)
Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$.

1. Montrez que c'en est une base.
2. Donnez les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 4 - applications linéaires 1 (3 points)
f, g, h sont des applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies comme suit. Sont-elles linéaires ?

1. $f(x, y, z) = (y, 2y, 3y)$
2. $g(x, y, z) = (y + z, y - 1, 2x - z)$
3. $h(x, y, z) = (x, x^2, x^3)$

Exercice 5 - applications linéaires 2 (4 points)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire avec $f(0, 2, 2) = (1, 0, 1)$, $f(1, -1, 1) = (1, 2, 3)$ et $f(-1, -1, 1) = (0, 2, 0)$. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Trouvez les images par f de e_1, e_2 et e_3.
2. Donnez la définition explicite de f, c.à.d. la valeur de $f(x, y, z)$.

Exercice 6 - linéarité de la composition (3 points)
Soient E, F, G des espaces vectoriels, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. Montrez que la composition définie par $g \circ f : E \to G$, $g \circ f(v) = g(f(v))$ est linéaire.